

## 各種動特性測定法の応用

富田 昇  
長屋 健一

## Applications of Some Process Dynamics Determination Methods

Noboru Tomita  
Ken-ichi Nagaya

There are many methods for the determination of process dynamics. Some methods require a great amount of data, and high speed calculation means.

As a result, these methods have seldom been used at local plants. However, thanks to the recent popularization of digital data acquisition systems and digital computers, we can now use such methods.

In these papers, we will illustrate our applications which were developed to suit our needs. These methods hold promise in the future for further applications in adaptive control systems.

## 1. はじめに

データ集録技術の発達普及、および電子計算機の大型化高速化によって統計的自動制御理論の応用がプロセス工業にも浸とうしてきはじめています。当社でもプロセスデータを収集しながら、その特性を計算し、オンラインでの制御を大規模に行なうようになろう。

本研究は、プラントの動特性を測定推定する方法に関するものである。デジタル高速集録と高速デジタル計算機を組み合わせることを前提とした「操業データからの動特性推定法」「相関法」「パルステスト法」の具体的な応用法を開発したので、それについて述べる。

## 2. 操業データからの動特性推定計算法

## 2.1 原理

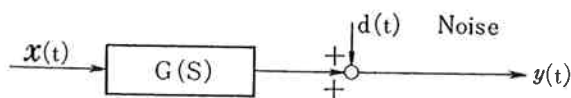


Fig. 1 Block diagram

Fig. 1 のように伝達関数  $G(s)$  をもつ対象を考えよう。出力にあらわれる雑音  $d(t)$  が平均値零で、入力

$x(t)$  とは独立の信号であれば、次式がなりたつことが知られている。

$$\Phi_{xy}(j\omega) = G(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega) \quad (1)$$

ここで、 $\Phi_{xx}(j\omega)$  は  $x(t)$  のパワースペクトル、 $\Phi_{xy}(j\omega)$  は  $x(t)$  と、出力  $y(t)$  の相互パワースペクトルであり、次式で定義される。

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau) \quad (2)$$

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi_{xy}(\tau) \exp(-j\omega\tau) \quad (3)$$

ここで  $\varphi_{xx}(\tau)$  は  $x(t)$  の自己相関関数であり、 $\varphi_{xy}(\tau)$  は、 $x(t)$  と  $y(t)$  の相互相関関数であり次式で定義されるものとしよう。

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (4)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (5)$$

したがって、 $G(s)$  を求めるには、まず(4)、(5)式を計算し、(2)、(3)式でフーリエ変換し、(1)式で  $G(j\omega)$  を求めるという順序になる。

## 2.2 相関関数の計算法

一般に使われている自己相関関数の計算法<sup>1)</sup>は Fig. 2

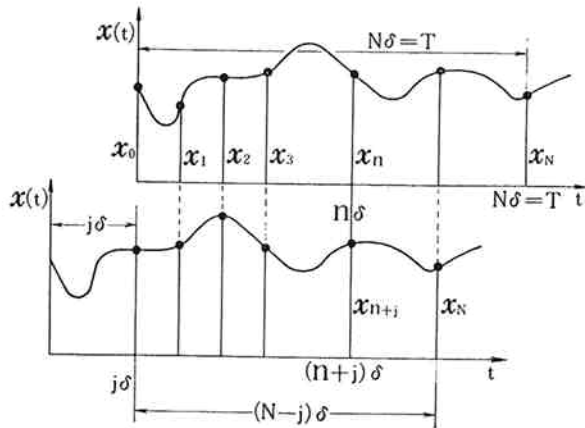


Fig. 2 The popular calculation method for autocorrelation function

を参照すると次式であらわされる。

$$\varphi_{xx}(j\delta) = \frac{1}{N-j+1} \sum_{n=0}^{N-j} x_n x_{n+j} \quad (6)$$

(j = 0, 1, 2, \dots)

この方法の特徴は、j の値によって掛算の回数、計算区間が異なるところにある。

さて本研究では、入力 x(t) としてM系列信号<sup>2)</sup>をあつかうので次のような計算法を開発使用した。これはM系列信号の周期性に着目したものである。これはあとで述べるように場合によっては計算回数を数十分の一に減らすことができる。

データに周期性がある場合の相互相関関数の計算法

今一周期分のデータが、x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, ..., x<sub>m</sub>, y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, ..., y<sub>m</sub> であるとする。i = 1, 2, ..., m j = -m, ..., -1, 0, 1, ..., m (mは正の整数) に対して次のように計算する。

j ≥ 0 のとき

i + j ≤ m に対して  $\phi_1 = \sum_i x_i y_{i+j}$

i + j > m に対して  $\phi_2 = \sum_i x_i y_{i+j-m}$

とすると  $\varphi_{xy}(j\delta) = (1/m)(\phi_1 + \phi_2)$

j < 0 のとき

i + j > 0 に対して  $\phi_3 = \sum_i x_i y_{i+j}$

i + j ≤ 0 に対して  $\phi_4 = \sum_i x_i y_{i+j+m}$

とすると  $\varphi_{xy}(j\delta) = (1/m)(\phi_3 + \phi_4)$

これは Fig. 3 のようにデータをリング状に使用するわけである。以上は計算原理であり実際に使用している方法は次のようなものである。

いま、二周期分のデータを

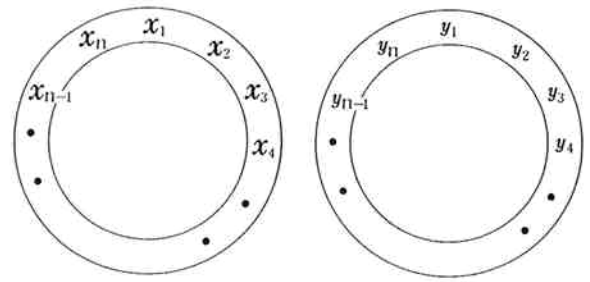


Fig. 3 Rings of data

x<sub>1,1</sub>, x<sub>2,1</sub>, ..., x<sub>m,1</sub>, x<sub>1,2</sub>, x<sub>2,2</sub>, ..., x<sub>m,2</sub>

y<sub>1,1</sub>, y<sub>2,1</sub>, ..., y<sub>m,1</sub>, y<sub>1,2</sub>, y<sub>2,2</sub>, ..., y<sub>m,2</sub>

という形でとって来てあるものとする。i = 1, 2, ..., m j = -m, ..., -1, 0, 1, ..., m (mは正の整数) とすると

j = 0 に対して

$$\varphi_{xy}(j\delta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i,2} \cdot y_{i,2} \quad (7)$$

j > 0 に対して

$$\varphi_{xy}(j\delta) = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^{m-j} x_{i,2} y_{(i+j),2} + \sum_{i=m-j+1}^m x_{i,1} y_{(i+j-m),2} \right) \quad (8)$$

j < 0 に対して

$$\varphi_{xy}(j\delta) = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^{-j} x_{i,2} y_{(i+j+m),1} + \sum_{i=1-j}^m x_{i,2} y_{(i+j),2} \right) \quad (9)$$

で計算するわけである。

2.3 例題の計算

(7), (8), (9)式をつかって例題を計算してみよう。まず確定的な値をもつ例題について計算してみる。時定数1秒の一次遅れ系 1 / (1 + S) に Fig. 4 にみるようなM系列信号<sup>2)</sup> (周期 31Δ, Δ = 0.4(秒)) を入力 x(t) として与え、ルンゲクッタ法で出力 y(t) を計算する。(y(t) の値は適切な計算きざみで計算してあるとしよう)

Fig. 5~Fig. 7 に種々のサンプル間隔に対する φ<sub>xy</sub>(jδ) の値が上げている。これは(7), (8), (9)式を使った実質一周期分のデータで計算したものである。あとで述べる結果と合わせ考えると、サンプル間隔 δ は Δ/20~Δ/40 が実際的である。このときのサンプル数は 620~1240 個である。

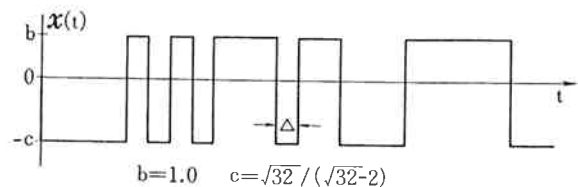


Fig. 4 M-sequence signal

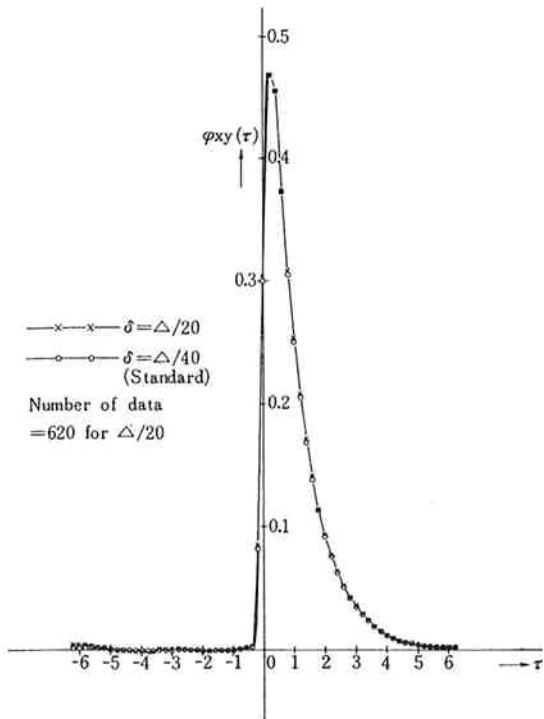


Fig. 5 Crosscorrelation function of the sample interval  $\delta = \Delta/20$

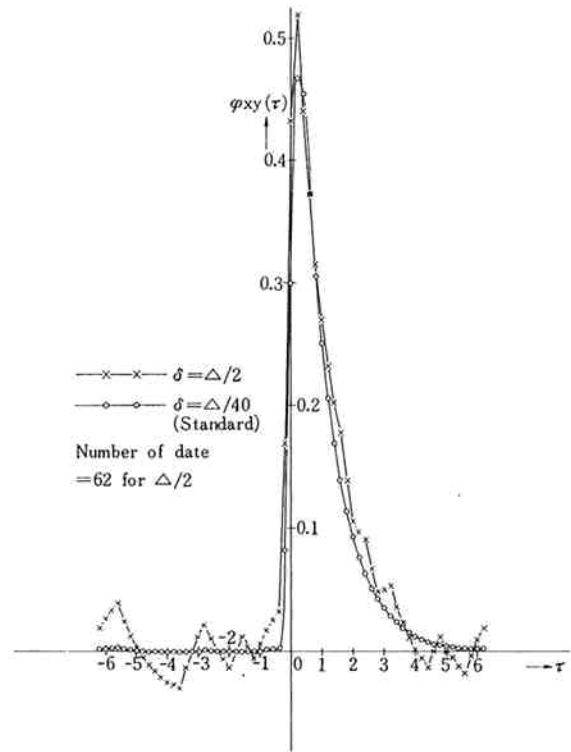


Fig. 7 Crosscorrelation function of the sample interval  $\delta = \Delta/2$

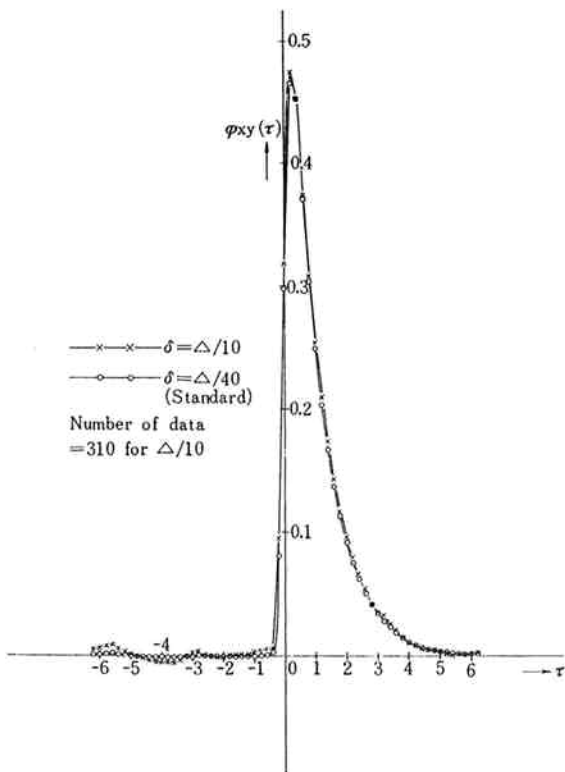


Fig. 6 Crosscorrelation function of the sample interval  $\delta = \Delta/10$

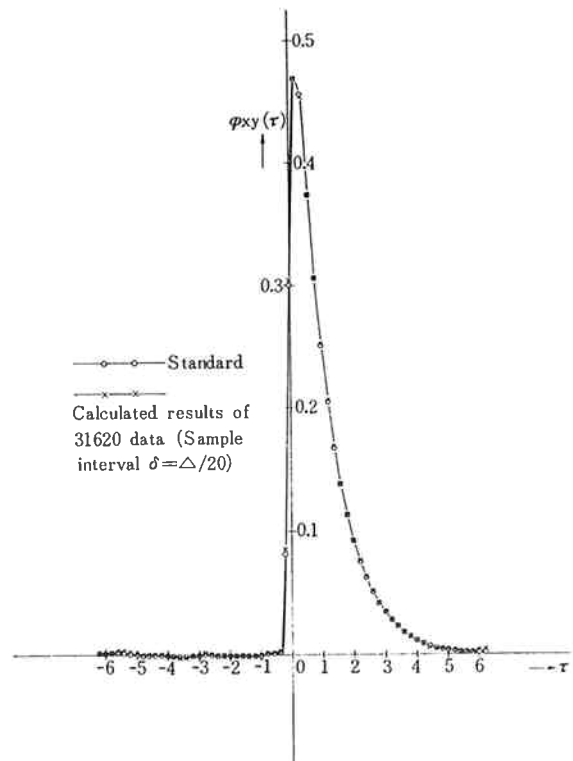


Fig. 8 Calculated results of 31620 data by the equation (6)

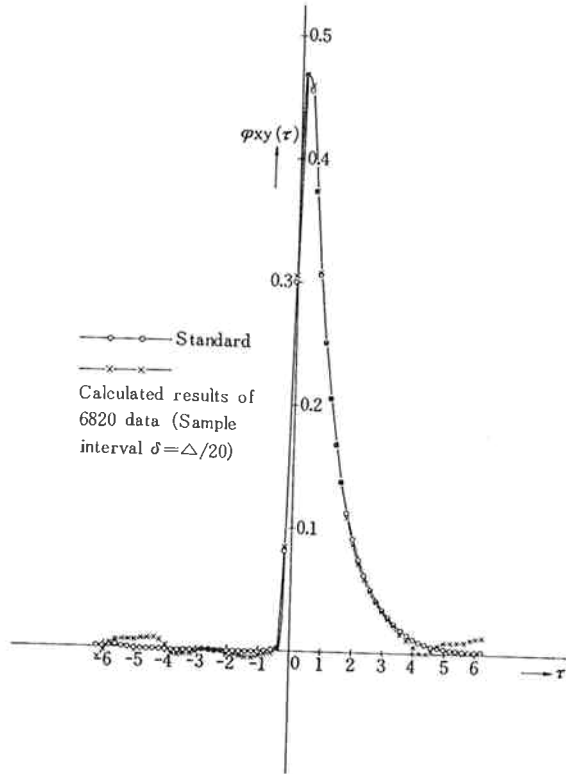


Fig. 9 Calculated results of 6820 data by the equation (6)

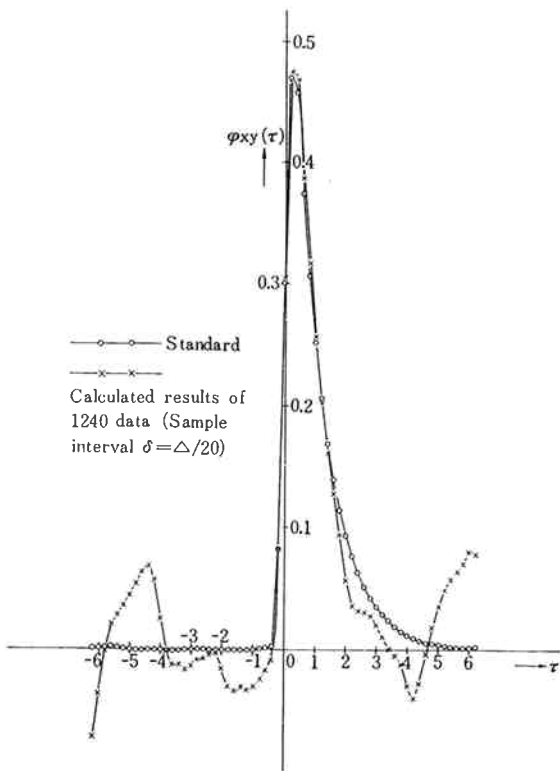


Fig. 10 Calculated results of 1240 data by the equation (6)

さてこれを(6)式で計算した結果が Fig. 8~Fig. 10 にあげてある。このときは数周期分のデータで計算する必要がある。 $\delta = \Delta/20$  においてサンプル数 31620個でやると(7), (8), (9)式の方法における  $\delta = \Delta/20$  (サンプル数 620) の精度にほぼ近づいていることがわかる。

2.4 フーリエ変換および  $G(j\omega)$  の計算

有限な積分範囲で(3)式を計算して、入出力の相互パワースペクトルを計算しなければならない。フーリエ変換は次の台形則を使うことにする。記号を Fig. 11 で参照すると、

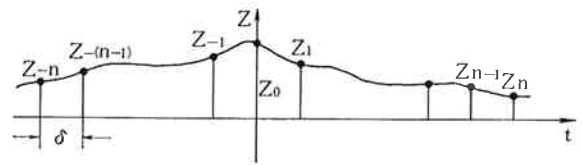


Fig. 11 A function Z(t)

$$Z(j\omega) = \left( \frac{1}{2} Z_{-n} e^{-j\omega(-n)\delta} + Z_{-(n-1)} e^{-j\omega(-(n-1))\delta} + \dots + Z_0 + \dots + Z_{n-1} e^{-j\omega(n-1)\delta} + \frac{1}{2} Z_n e^{-j\omega n\delta} \right) \delta \quad (10)$$

と書ける。当社現有の FACOM-230-25は、複素数についての種々の関数が完備していて、(10)式はこのままの形で計算できる。さて2・3項の例題について  $G(j\omega)$  を計算してみよう。

$-(1/2)31\Delta \leq \tau \leq (1/2)31\Delta$  の範囲では(4)式は理論計算によれば Fig. 12 のようになる<sup>2)</sup>。また Fig. 12 を

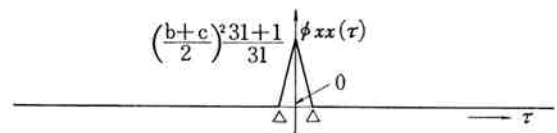


Fig. 12 Autocorrelation function of the example signal

フーリエ変換すれば、理論的に

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \frac{31+1}{31} \left( \frac{b+c}{2} \right)^2 \left( \frac{\sin \omega \Delta / 2}{\omega \Delta / 2} \right)^2 \Delta \quad (11)$$

となる。さて(7), (8), (9)式で計算した Fig. 5, 6, 7 の相互相関関数を、各対応したきざみ  $\delta$  に対して(10)式でフーリエ変換することにしよう。また  $\Phi_{xx}(j\omega)$  は(11)式の結果を使うことにしよう。そうして(1)式を計算してボード線図にしたのが Fig. 13~Fig. 15 である。 $\delta = \Delta/40$  で一連の計算をしたものの結果を Fig. 16 に上げる。以上から  $\delta = \Delta/20 \sim \Delta/40$  で、確定的な入出力に対して実用的な結果が出ることがわかった。

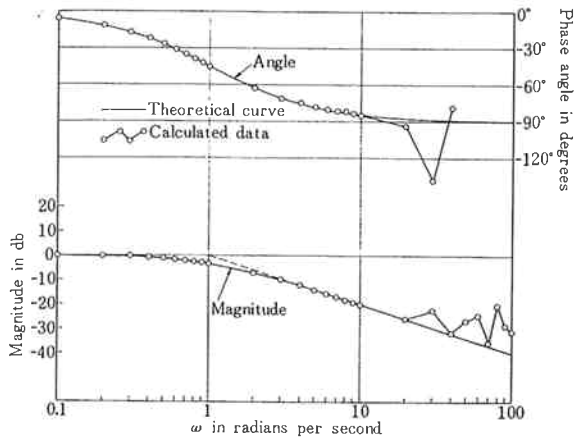


Fig. 13 A Bode diagram calculated by eq. (1),  $\delta$  in the Fourier transform is  $\Delta/20$

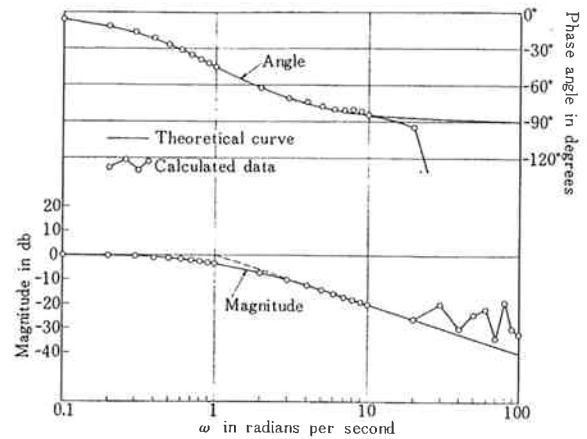


Fig. 16 A Bode diagram calculated by eq. (1),  $\delta$  in the calculation is  $\Delta/40$

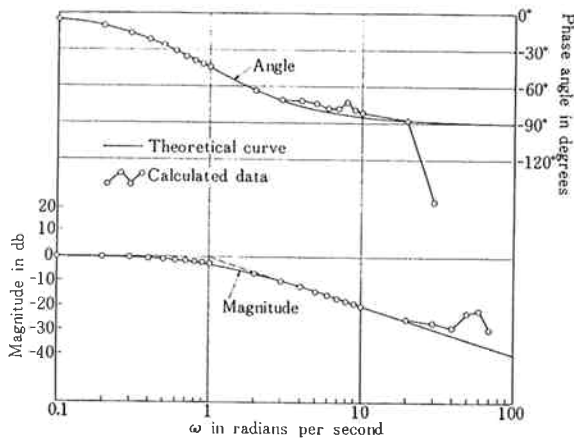


Fig. 14 A Bode diagram calculated by eq. (1),  $\delta$  in the Fourier transform is  $\Delta/10$

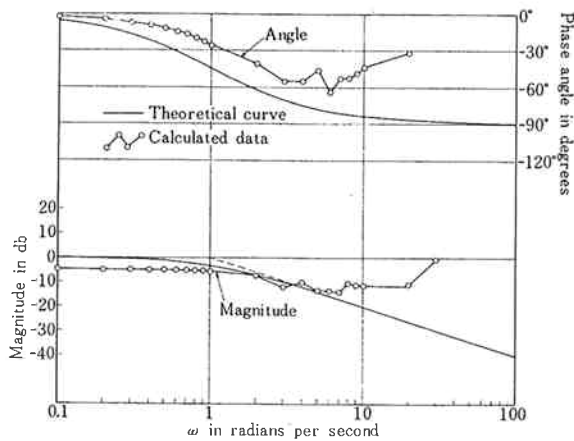


Fig. 15 A Bode diagram calculated by eq. (1),  $\delta$  in the Fourier transform is  $\Delta/2$

### 2.5 ランダム信号についての計算

本研究の目的の一つは現場データ数万個を磁気テープにおさめておいて（もちろんデジタルデータ）、汎用計算機でそれを計算処理することである。この場合データには周期性のないこともある。この場合も(7), (8), (9)式的方式を次のように使用すると大変便利である。データに発生時刻順に次のように名まえをつけて、磁気テープにおさめておく。相関関数の計算範囲は  $-m\delta \leq \tau \leq m\delta$  である。

$X_1, X_2, \dots, X_m, X_1, X_2, \dots, X_m, X_1, X_2, \dots, X_m, X_1, X_2, \dots, X_m, \dots, X_m, \dots$   
 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_m, \dots, Y_m, \dots$

1 ~ m までのデータを周期性のあるなしにかかわらず、1 周期のデータであると呼ぶことにしよう。

まず最初の 1, 2 周期目のデータを順番に

$X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{m,1}, X_{1,2}, X_{2,2}, \dots, X_{m,2}$   
 $Y_{1,1}, Y_{2,1}, \dots, Y_{m,1}, Y_{1,2}, Y_{2,2}, \dots, Y_{m,2}$

に割当てる。そして(7), (8), (9)式で  $m \cdot \varphi_{xy}(j\delta) = \phi_1$  を計算する。

つぎに  $X_{1,2}, X_{2,2}, \dots, X_{m,2}$  に割当ててあったデータを  $X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{m,1}$  に割当てて、 $X_{1,2}, X_{2,2}, \dots, X_{m,2}$  には新たに第 3 周期目のデータ  $X_1, X_2, \dots, X_m$  を割当てる。Y についても同様にする。そして再び(7), (8), (9)式を使って  $m \cdot \varphi_{xy}(j\delta) = \phi_2$  を計算する。

これをくりかえし全データについて行ない、使ったデータ周期数が k であるとしよう。

そうすると求める相関関数は次のようになる。

$$\varphi_{xy}(j\omega) = \frac{1}{m(k-1)}(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_{k-1}) \quad (12)$$

なお、この方法は(6)式を計算するときにも修正すれば使用できるので、Fig. 8, 9, 10 の計算は、(12)式を変形して計算したことをつけ加えておこう。さて(12)式の方法を例題に適用してみよう。再び2.3項の例題にたちかえろ。今までは  $d(t)=0$  にしておいて確定的な値に注目して、計算方法を例題によってチェックして来た。ここで  $d(t)$  に、一様擬似乱数をとってみよう。合同式

$$d_{n+1} = ad_n \pmod{M} \quad (13)$$

において  $a=23$ ,  $M=10^8+1$  とすると周期 5,882,352 の擬似乱数が得られる。これを、たて軸方向について区間  $(-0.5, +0.5)$  に入るようにして Fig. 17 の様なノイズ  $d(t)$  を作る。

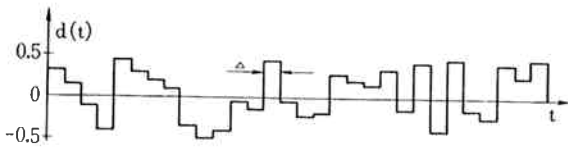


Fig. 17 Some noise

さて、この結果出来た出力  $y(t)$  を使って、式(12)の方法をつかって相互相関関数を計算し、2.4項を同様の方法でフーリエ変換して、 $G(j\omega)$  を求めた結果が Fig. 18~Fig. 20 にあげてある。計算データ数が多くなるにつれて、ばらつきが小さくなっている様子が良くわかる。

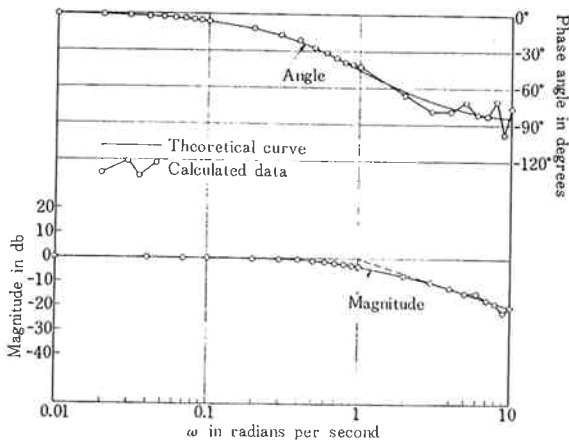


Fig. 18 A Bode diagram calculated by 31620 data of 51 periods of M series

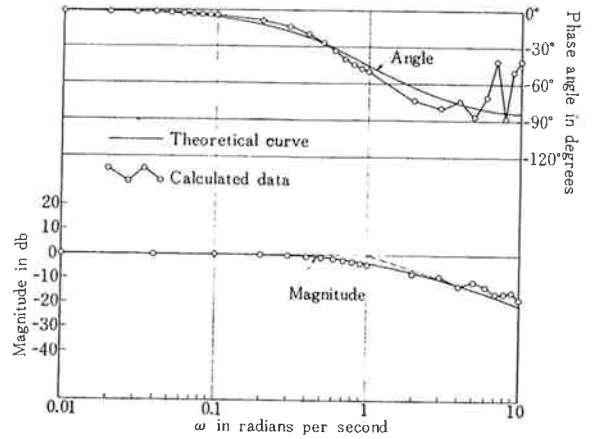


Fig. 19 A Bode diagram calculated by 6820 data of 11 Periods of M series

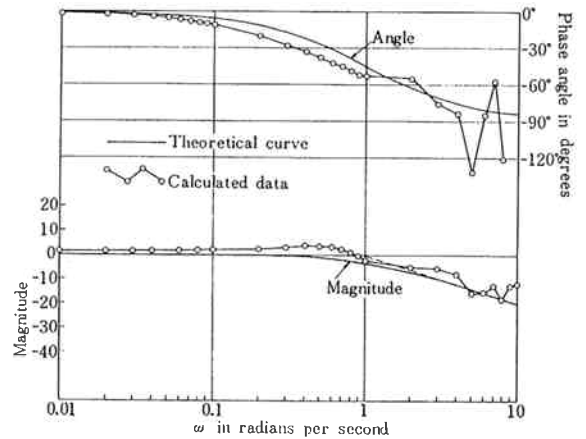


Fig. 20 A Bode diagram calculated by 1240 data of 2 periods of M series

### 3. 相 関 法

これは2項において相互相関関数を求める過程で得られるものにある係数をかけると得られる。原理は省略して結果だけ述べよう<sup>2)</sup>。先の例題のM系列信号において周期を  $N=31$  とする。

$$\Phi_{xx}^0(0) = \frac{N+1}{N} \left( \frac{b+c}{2} \right)^2 \Delta \quad (14)$$

と計算された量を使用すると、Fig. 1における伝達関数のインパルス応答  $g(\tau)$  は、

$$\varphi_{xy}(\tau) \doteq \Phi_{xx}^0(0)g(\tau) \quad (15)$$

で計算出来ることが知られている。 $\varphi_{xy}(\tau)$  は2.3項で計算しているので、これと(14)式の値を使えば容易に  $g(\tau)$  が得られる。Fig. 21に計算結果を上げる。 $\Delta < \tau$  においてよく一致することがわかる。なお2.5項のラ

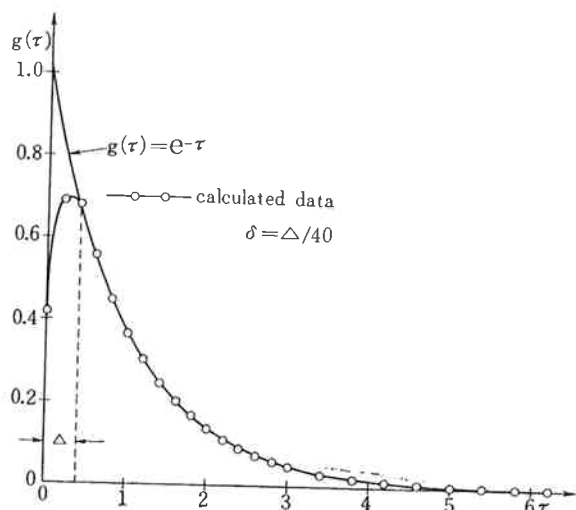


Fig. 21 Calculated impulse response

ランダム信号のある場合の例題において、Fig. 18~20 を求める途中で  $\varphi_{xy}(j\delta)$  が求まるので、これを使って、インパルス応答を求めたのが Fig. 22~24 である。

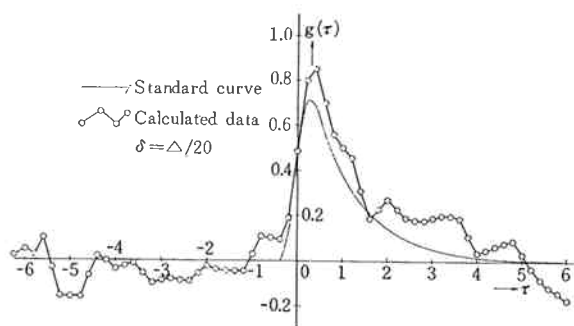


Fig. 24 Impulse response calculated by 1240 data of 2 periods of M series

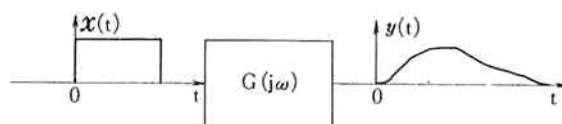


Fig. 25 Illustration of pulse test

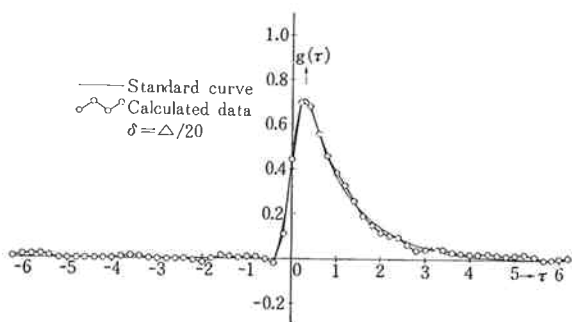


Fig. 22 Impulse response calculated by 31620 data of 51 periods of M series

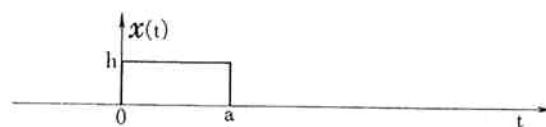


Fig. 26 Shape of input  $x(t)$

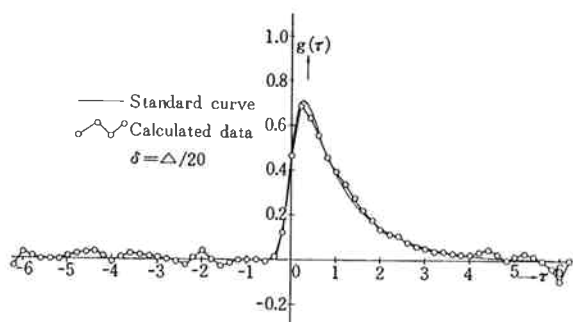


Fig. 23 Impulse response calculated by 6820 data of 11 periods of M series

#### 4. パルステスト法

これは Fig. 25 のように、入力  $x(t)$  として任意波形を入れたときの出力  $y(t)$  を測定し、次式によりプロセスの周波数応答を求める方法として知られている。

$$\mathcal{F}[y(t)] = G(j\omega)\mathcal{F}[x(t)] \quad (16)$$

ただし  $\mathcal{F}[y(t)]$ ,  $\mathcal{F}[x(t)]$  は、 $y(t)$ ,  $x(t)$  のフーリエ変換である。実際にこの手法を応用するには、入力として Fig. 26 のようなものが適当である。この形は容易に理論計算出来て、下式のようになる。

$$\mathcal{F}[x(t)] = h(e^{-j\omega a} - 1)/(-j\omega) \quad (17)$$

$1/(1+S)$  の系へ、 $a=2$ ,  $h=1$  の入力を与えて種々のきざみに対して、シミュレーションによって計算したものが Fig. 27~Fig. 29 にあげてある。計算きざみ  $\delta$  の大きさによって、当然計算精度が異なって来るが、ここではプロセスの時定数の  $1/20$  程度で実用データが得られることがわかる。なお  $t$  の計算区間は 0 から 8 までで行なっている。

この数値計算法は 2 項の手法で使ったフーリエ変換プログラムの応用である。実際に動いている空気式流量調節系にこの手法を適用した例が、Fig. 30 にあげてある。

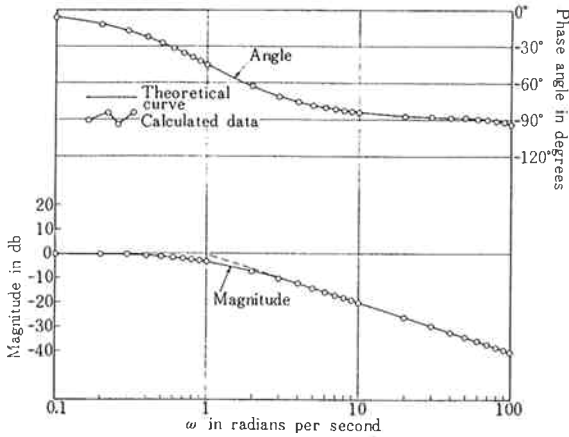


Fig. 27 Results at  $\delta=1/200$ , calculation range of (0—8.0)

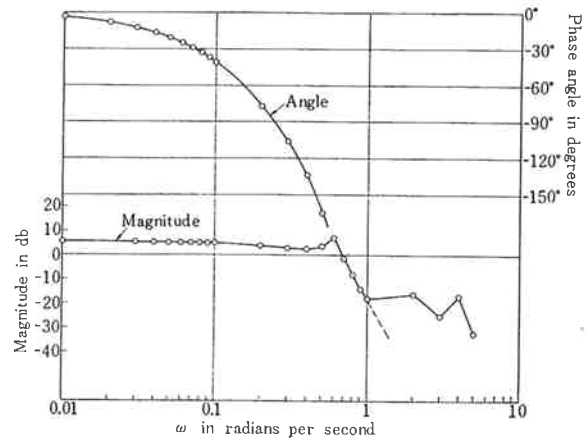


Fig. 30 A Bode diagram of some actual flow control system measured by pulse test method

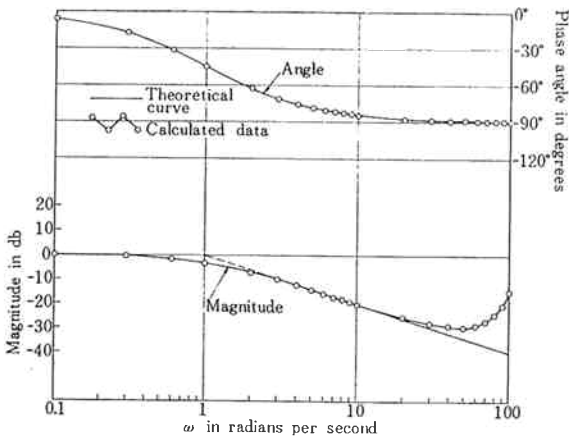


Fig. 28 Results at  $\delta=1/20$ , calculation range of (0—8.0)

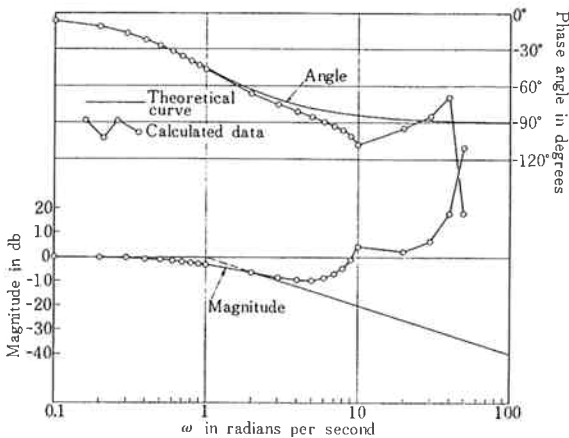


Fig. 29 Results at  $\delta=1/2$ , calculation range of (0—8.0)

5. おわりに

以上三通りの動特性測定法について述べた。いずれもばらばらなデータを取りあつかうので、初めに述べたようにこの手法はデータ集録装置や高速コンピューターなしでは使えないが、近年電子計算機の記憶容量、計算スピードも著しく進歩し可能となって来た。今後の化学プロセスの品質および収率向上、省力に対して電子計算機制御が決め手であることは否めない事実であるが、従来の方では不可能なさらに進んだ動特性の把握を行なうことにより効果的な前向き電子計算制御に結びつけることができるこの種の手法開発を今後も続けて行きたい。

以上

文 献

- 1) 砂原善文；“自動制御技術”，8，119（日本自動制御協会）（1965）。
- 2) 古田，伊沢；“計測と制御”，3，№9，665（1964）。
- 3) 宮川，佐藤，茅；“不規則信号論と動特性推定”，（コロナ社）（1969）。
- 4) 磯部ほか；“相関関数およびスペクトル”，（東京大学出版会）（1968）。
- 5) 茅；“自動制御工学”，（共立出版）（1969）。