

1 次 遅 れ の 計 算 法

富 田 昇
福 山 忠 男

The Method of Numerical Solution of the First Order Lag.

Noboru Tomita
Tadao Fukuyama

There are many methods for the numerical solution of differential equations, but the method described in this paper will be simple and probably more useful in the analysis of the dynamic characteristics of a control system. The results calculated by a digital computer were satisfactory in accuracy. The fundamental idea is as follows. The input can be divided into two inputs, i.e., the step and the ramp input. Since the first order lag is linear, the actual output can be calculated as a sum of the two outputs for the step and the ramp input.

1. ま え が き

プロセス制御系は高次の遅れ系であるが、実際は次数を落として近似する事が多い。また、解析にはアナコンが利用されるが、ここではディジコンによる一つの計算方法を述べたい。

系の入力と出力の関係を一つのまとまった式で解くと非常に難かしいので、アナコンと同じ様な方法で解く。計算ピッチを決め、各要素をシリーズにして順々に解き、これをくり返す。要素としては1次遅れが多いから、これを精度よく求めると全体の精度も上るわけである。1次遅れ(1階微分方程式)の計算方法もいろいろあるが、ここで示す解法は簡単で、その精度も悪くないので2~3の計算例と共に報告する。

2. 計 算 方 法

1次遅れ系への入力をステップ状のものとランプ状のものに分け、次にこれ等の入力に対する出力を求めてその和をとるという方法である(系が線形だから可能である)。ステップ入力に対する出力〔1〕、ランプ入力に対する出力〔2〕、一般の入力に対する出力〔3〕を求めてみる。

〔1〕 ステップ入力に対する出力

Fig. 1 は系のブロック図で、Fig. 2 は入力と出力の信号波形を示す。Fig. 1 を見ればわかるように入力と出力の差を積分していくのが、1次遅れである。また、

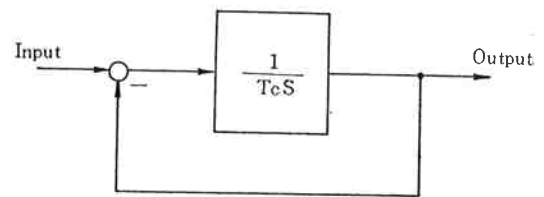


Fig. 1 Block diagram of the first order lag.

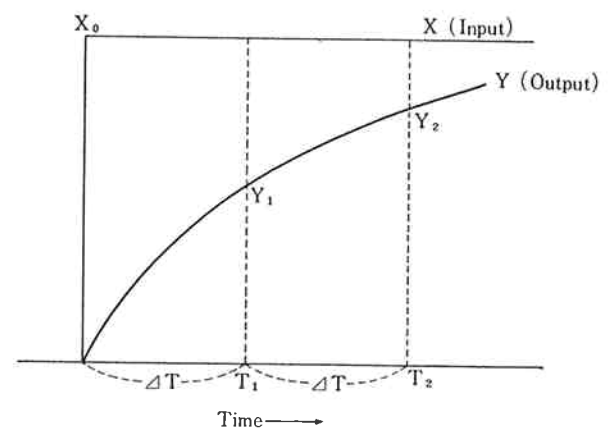


Fig. 2 Step input and its output.

入出力の関係を式で書くと

$$\text{出力} = (\text{ステップの大きさ}) \times (1 - e^{-\frac{T}{Tc}}) \dots \text{①}$$

ディジコンで計算するときは、計算ピッチを ΔT として①式の時間 T を ΔT 、ステップの大きさを入力と出力の

差で置きかえ、出力を加算すればよい (T_c は時定数)。

これは Fig. 1 を見れば明らかであろう。Fig. 2 より

$T=T_1$ のとき

$$Y_1 = X_0(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) \dots\dots\dots ②$$

$T=T_2$ のとき

$$Y_2 = (X_0 - Y_1)(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) + Y_1 \dots\dots\dots ③$$

$T=T_n$ のとき

$$Y_n = (X_0 - Y_{n-1})(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) + Y_{n-1} \dots\dots\dots ④$$

〔2〕 ランプ入力に対する出力

Fig. 3 はランプ入力の際の出力の立上り部分の図である。入力と出力の関係を求めるため、 $X=kT$ なる関数を考える。入力を X 、出力を Y とすれば

$$\left. \begin{aligned} X &= kT \\ Y &= kT - kT_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑤$$

入力と出力の比、 Y/X をとると

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{kT - kT_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})}{kT} \\ &= 1 - \frac{T_c}{T}(1 - e^{-\frac{T}{T_c}}) \dots\dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

上式⑥は入力の勾配 k とは無関係で、時間 T と時定数 T_c だけで決まる。時間 T は計算ピッチ ΔT で置きかえられるので、Fig. 3 の入力 X_1 に対する出力 Y_1 は

$$Y_1 = X_1(1 - \frac{T_c}{\Delta T}(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}})) \dots\dots\dots ⑦$$

〔3〕 一般の入力に対する出力

Fig. 4 は Fig. 5-1 と Fig. 5-2 のように分けることができる。出力としては、それぞれの出力の和として求められる。入力を X_0, X_1, X_2, X_n 、ランプ入力に対する出力を Y_{11}, Y_{21}, Y_{n1} 、ステップ入力に対する出力を Y_{12}, Y_{22}, Y_{n2} とすれば出力 Y_1, Y_2, Y_n は次の式で計算される。

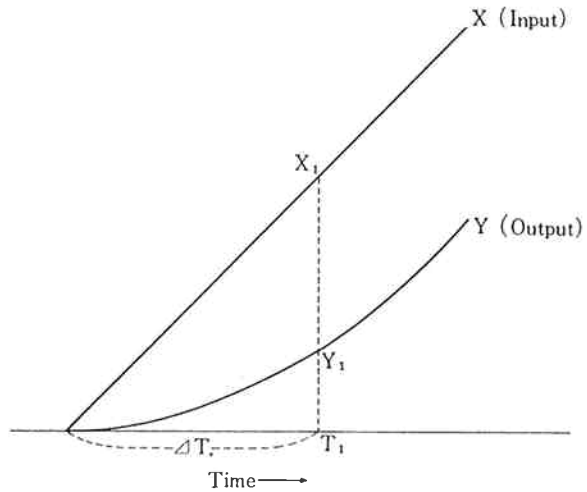


Fig. 3 Ramp input and its output.

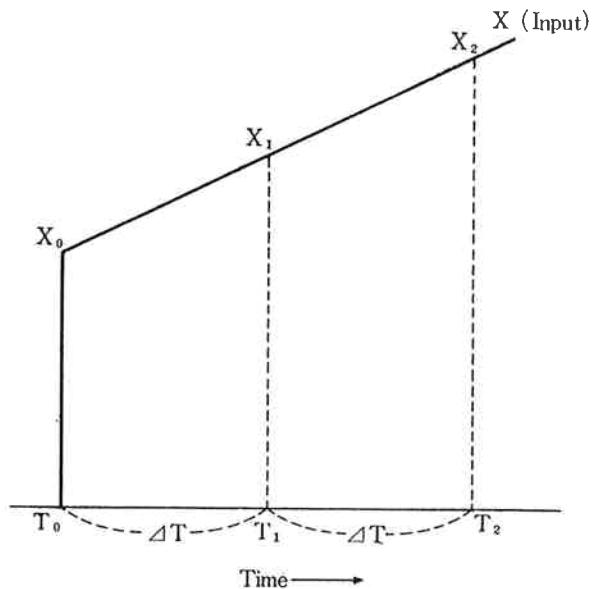


Fig. 4 Input signal, which can be divided into two components (See Fig. 5-1 and Fig. 5-2).

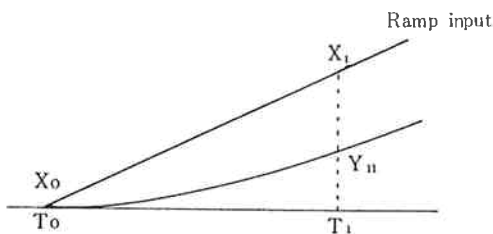


Fig. 5-1

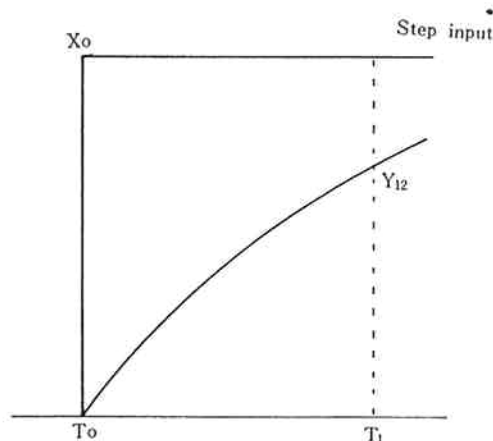


Fig. 5-2

T=T₁ のとき,

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= (X_1 - X_0) \left(1 - \frac{T_c}{\Delta T} (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}})\right) \\ Y_{12} &= X_0 (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) \\ Y_1 &= Y_{11} + Y_{12} \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{8}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{n1} &= (X_n - X_{n-1})A \\ Y_{n2} &= (X_{n-1} - Y_{n-1})B \\ Y_n &= Y_{n1} + Y_{n2} + Y_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{11}$$

または, C=B-A, D=1-B として,

$$Y_n = AX_n + CX_{n-1} + DY_{n-1} \dots \textcircled{12}$$

T=T₂ のとき,

$$\left. \begin{aligned} Y_{21} &= (X_2 - X_1) \left(1 - \frac{T_c}{\Delta T} (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}})\right) \\ Y_{22} &= (X_1 - Y_1) (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) \\ Y_2 &= Y_{21} + Y_{22} + Y_1 \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{9}$$

プロセス制御系では他に積分要素, 微分要素, 無駄時間要素等があるが, デジコンでは簡単に計算できるので, ここでは省略する。

3. 計算例

[1] 1次遅れ, 2次遅れの計算

ブロック図 (Fig. 6) のような系を計算し, 真値と比較してみた。入力をステップ入力とし, X₁ は 1 次遅れ,

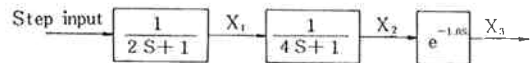


Fig. 6 Block diagram of the system with two first order lags and a dead time

T=T_n のとき,

$$\left. \begin{aligned} Y_{n1} &= (X_n - X_{n-1}) \left(1 - \frac{T_c}{\Delta T} (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}})\right) \\ Y_{n2} &= (X_{n-1} - Y_{n-1}) (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T_c}}) \\ Y_n &= Y_{n1} + Y_{n2} + Y_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{10}$$

一般には, B=1-e^{-ΔT/T_c}, A=1-T_c/ΔT B として

Table 1. Numerical results of the transient response of the system shown in Fig. 6.

T (SEC)	X1	F1	X1-1	X2	F2	X2-F2	X3
0.10	0.0487705	0.0487705	0.0000000	0.0006095	0.0006095	-0.0000000	0.0000000
0.20	0.0951625	0.0951625	0.0000000	0.0023784	0.0023785	-0.0000001	0.0000000
0.30	0.1392920	0.1392920	0.0000000	0.0052208	0.0052210	-0.0000002	0.0000000
0.40	0.1812692	0.1812692	0.0000000	0.0090557	0.0090559	-0.0000002	0.0000000
0.50	0.2211992	0.2211992	0.0000000	0.0138067	0.0138069	-0.0000002	0.0000000
0.60	0.2591817	0.2591817	0.0000000	0.0194019	0.0194022	-0.0000003	0.0000000
0.70	0.2953119	0.2953119	0.0000000	0.0257737	0.0257740	-0.0000003	0.0000000
0.80	0.3296799	0.3296799	0.0000000	0.0328581	0.0328585	-0.0000004	0.0000000
0.90	0.3623718	0.3623718	0.0000000	0.0402953	0.0402957	-0.0000004	0.0000000
1.00	0.3934693	0.3934693	0.0000000	0.0489286	0.0489290	-0.0000004	0.0000000
1.10	0.4230501	0.4230501	0.0000000	0.0578051	0.0578055	-0.0000004	0.0006095
1.20	0.4511883	0.4511883	0.0000000	0.0671747	0.0671751	-0.0000004	0.0023784
1.30	0.4779542	0.4779542	0.0000000	0.0769905	0.0769909	-0.0000004	0.0052208
1.40	0.5034147	0.5034146	0.0000000	0.0872086	0.0872091	-0.0000004	0.0090557
1.50	0.5276334	0.5276334	0.0000000	0.0977874	0.0977879	-0.0000004	0.0138067
1.60	0.5506710	0.5506710	0.0000000	0.1086883	0.1086888	-0.0000004	0.0194019
1.70	0.5725850	0.5725850	0.0000000	0.1198748	0.1198753	-0.0000004	0.0257737
1.80	0.5934303	0.5934303	0.0000000	0.1313128	0.1313133	-0.0000004	0.0328581
1.90	0.6132289	0.6132289	0.0000000	0.1429703	0.1429709	-0.0000004	0.0402953
2.00	0.6321205	0.6321205	0.0000000	0.1548175	0.1548181	-0.0000004	0.0489286
2.10	0.6500622	0.6500622	0.0000000	0.1668264	0.1668270	-0.0000004	0.0578051
2.20	0.6671289	0.6671289	0.0000000	0.1789708	0.1789714	-0.0000004	0.0671747
2.30	0.6833632	0.6833632	0.0000000	0.1912264	0.1912270	-0.0000004	0.0769905
2.40	0.6988057	0.6988057	0.0000000	0.2035703	0.2035709	-0.0000004	0.0872086
2.50	0.7134252	0.7134252	0.0000000	0.2159813	0.2159819	-0.0000004	0.0977874
2.60	0.7274682	0.7274682	0.0000000	0.2284396	0.2284402	-0.0000004	0.1086883
2.70	0.7407597	0.7407597	0.0000000	0.2409274	0.2409279	-0.0000004	0.1198748
2.80	0.7534030	0.7534030	0.0000000	0.2534257	0.2534263	-0.0000004	0.1313128
2.90	0.7654297	0.7654297	0.0000000	0.2659205	0.2659211	-0.0000004	0.1429703
3.00	0.7768698	0.7768698	0.0000000	0.2783964	0.2783970	-0.0000004	0.1548175
3.10	0.7877520	0.7877520	0.0000000	0.2908398	0.2908404	-0.0000004	0.1668264
3.20	0.7981034	0.7981034	0.0000000	0.3032380	0.3032385	-0.0000004	0.1789708
3.30	0.8079500	0.8079500	0.0000000	0.3155793	0.3155799	-0.0000004	0.1912264
3.40	0.8173164	0.8173164	0.0000000	0.3278530	0.3278536	-0.0000004	0.2035703
3.50	0.8262260	0.8262260	0.0000000	0.3400493	0.3400499	-0.0000004	0.2159813
3.60	0.8347011	0.8347011	0.0000000	0.3521590	0.3521595	-0.0000004	0.2284396
3.70	0.8427628	0.8427628	0.0000000	0.3641737	0.3641743	-0.0000004	0.2409274
3.80	0.8504313	0.8504313	0.0000000	0.3760840	0.3760845	-0.0000004	0.2534257
3.90	0.8577259	0.8577259	0.0000000	0.3878888	0.3878893	-0.0000004	0.2659205
4.00	0.8646647	0.8646647	0.0000000	0.3995764	0.3995769	-0.0000004	0.2783964
4.50	0.8946007	0.8946007	-0.0000000	0.4560937	0.4560942	-0.0000004	0.3400493
5.00	0.9179150	0.9179150	-0.0000000	0.5090749	0.5090754	-0.0000004	0.3995764
5.50	0.9360721	0.9360721	-0.0000000	0.5582482	0.5582486	-0.0000004	0.4560937
6.00	0.9502129	0.9502129	-0.0000000	0.6035263	0.6035267	-0.0000003	0.5090749
6.50	0.9612257	0.9612257	-0.0000000	0.6449505	0.6449509	-0.0000003	0.5582482
7.00	0.9698026	0.9698026	-0.0000000	0.6826491	0.6826494	-0.0000003	0.6035263
7.50	0.9764822	0.9764822	-0.0000000	0.7168075	0.7168078	-0.0000002	0.6449505
8.00	0.9816843	0.9816843	-0.0000000	0.7476448	0.7476450	-0.0000002	0.6826491
8.50	0.9857357	0.9857357	-0.0000000	0.7753980	0.7753982	-0.0000002	0.7168075
9.00	0.9888909	0.9888909	-0.0000000	0.8003103	0.8003105	-0.0000002	0.7476448
9.50	0.9913482	0.9913483	-0.0000000	0.8226225	0.8226227	-0.0000001	0.7753980
10.00	0.9932620	0.9932620	-0.0000000	0.8425677	0.8425679	-0.0000001	0.8003103
10.50	0.9947524	0.9947524	-0.0000000	0.8603678	0.8603680	-0.0000001	0.8226225
11.00	0.9959132	0.9959132	-0.0000000	0.8762309	0.8762310	-0.0000001	0.8425677
11.50	0.9968172	0.9968172	-0.0000000	0.8903503	0.8903505	-0.0000001	0.8603678
12.00	0.9975212	0.9975212	-0.0000000	0.9029044	0.9029046	-0.0000001	0.8762309
12.50	0.9980695	0.9980695	-0.0000000	0.9140564	0.9140565	-0.0000001	0.8903503

X_2 は 2 次遅れであり, X_3 は 2 次遅れに無駄時間を加えたものである。Table 1 は計算結果で, F_1, F_2 は 1 次遅れと 2 次遅れの真値, $X_1 - F_1, X_2 - F_2$ は誤差である。

X_1 は計算方法から考えて誤差はない。 X_2 の誤差は小数点以下 7 桁目であるが, 計算ピッチ $\Delta T = 0.01$ なのでもまだ大きくしてもよいと思う。

〔2〕制御動作解析例

某メーカーより発売された新型の調節計と普通の調節計との制御動作比較をしてみたので, 例として挙げる。

制御対象には (i) 無駄時間の長いプロセス (ii) カスケード調節系の 2 つのもので, それぞれについて 2 つの調節計を入れ代えて制御動作を調べた。いずれも調節計の設定をステップ状に変えたときの応答である。

(i) 無駄時間の長いプロセス

Fig. 7 は制御系のブロック図である。Fig. 8 は普通の調節計を使った場合, Fig. 9 は新型の調節計を使っ

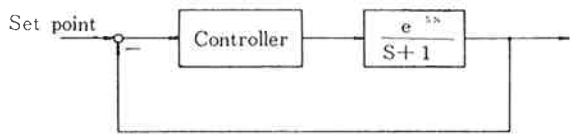


Fig. 7 Control system for the process with excessive dead time

たときの制御動作である (Fig. 8, Fig. 9 * 印は偏差を示す)。I E は設定値と制御量との偏差を積分したものであるが, 新型の計器の方が小さい。また, あまり振動もなく早く設定値に納まっている。

(ii) カスケード調節系

Fig. 10 はカスケード調節系のブロック図である。2 次調節計は普通の P I 動作のもので, プロセスは 2 次遅れと無駄時間の式で近似してある。 C_{P1} は 1 次調節計でこれを入れ代えてテストする。Fig. 11 は普通の調節計のとき, Fig. 12 は新型の調節計での制御動作である (図で * 印は X_9 , × 印は X_6 を示す)。

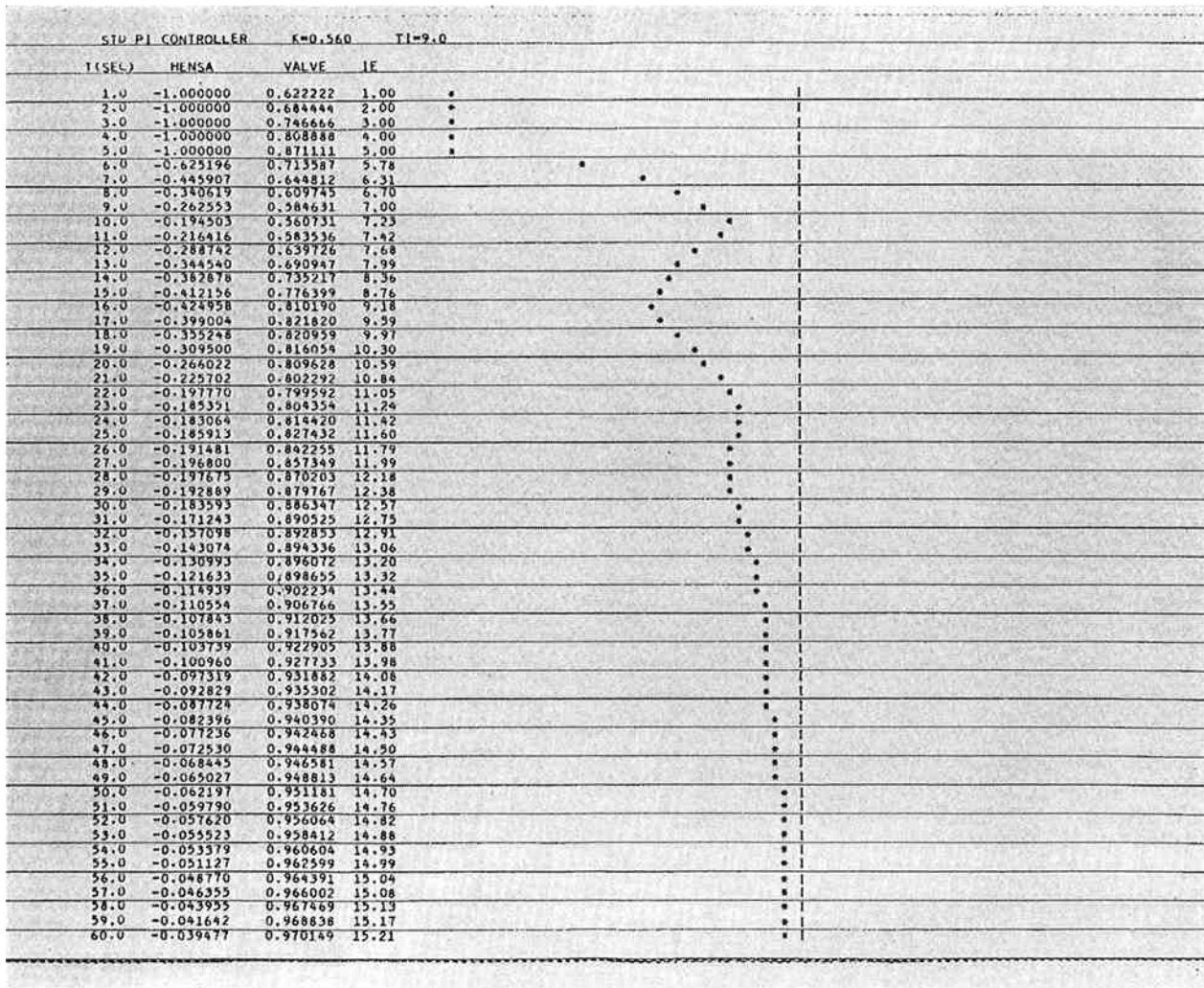


Fig. 8 Transient response of the control system shown in Fig. 7, where the controller is of a standard type.

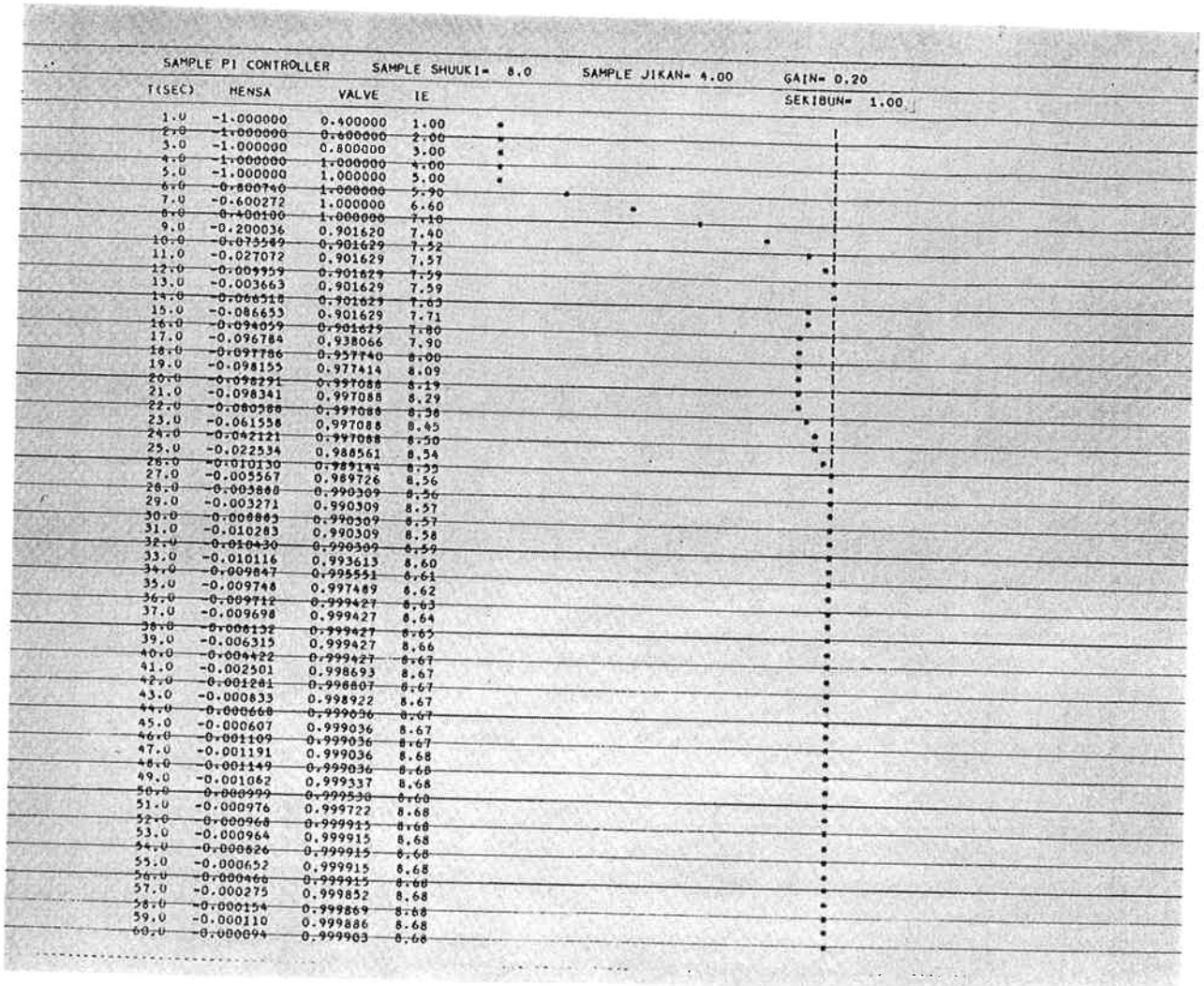


Fig. 9 Transient response of the control system shown in Fig. 7, where the controller is of a new type.

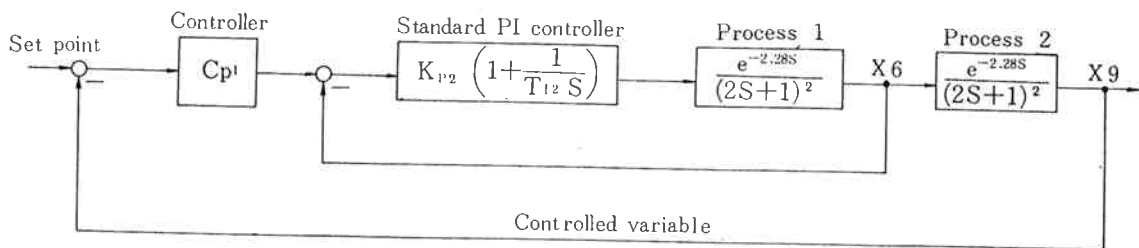


Fig. 10 Block diagram of cascade control system.

計算結果では、設定値に納まる時間および2次調節系の1次調節計への追従性は新型計器を使った方が秀れている。

以上のテストは設定値を変えた時の応答であるが、こ

れのほか、外乱に対する応答も調べてみなければならない。計器の採用には、このような解析の外、保守の面、金額等も考えて決定する。

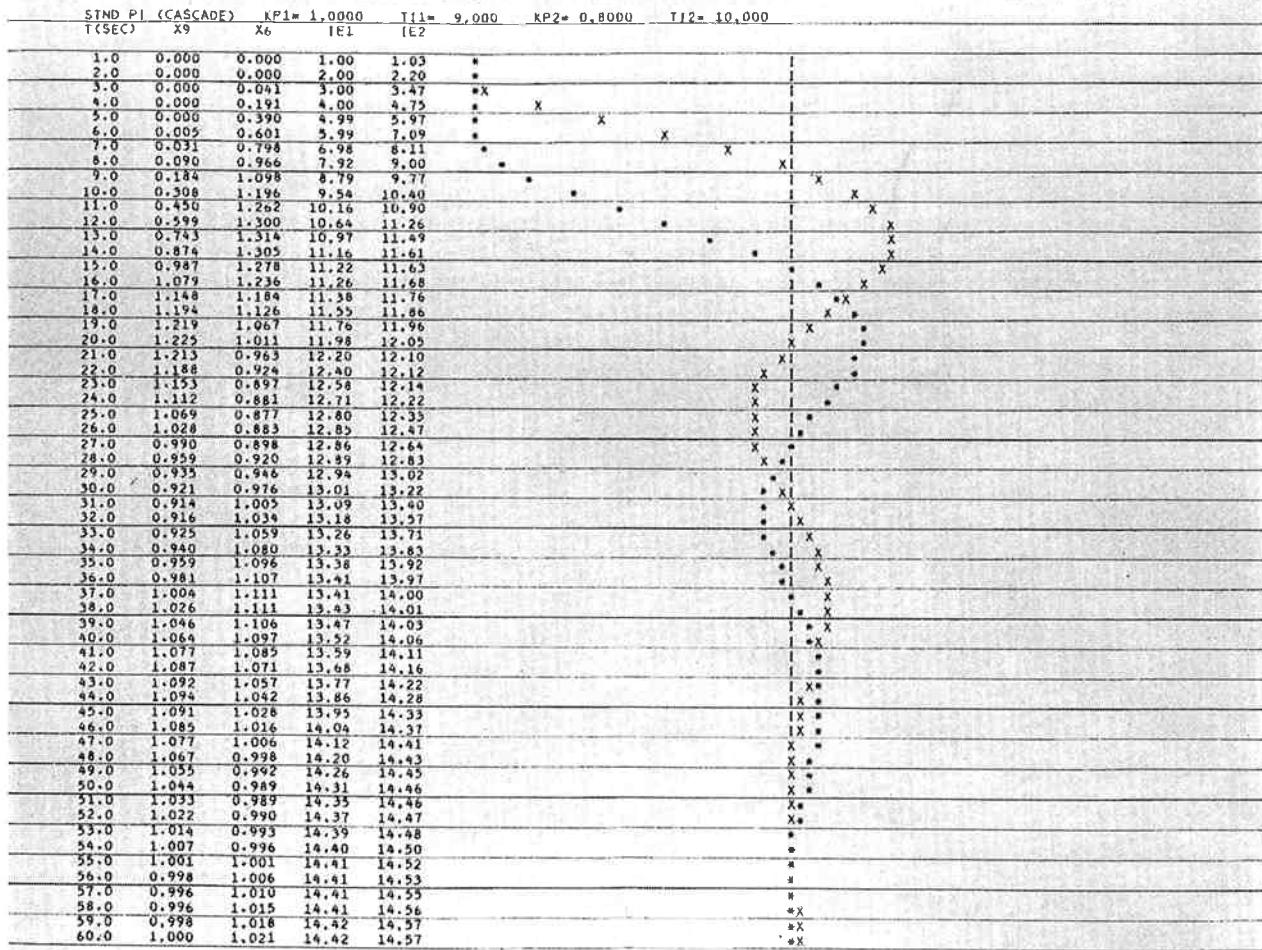


Fig. 11 Transient response of the cascade control system shown in Fig. 10, where Pcl is a standard controller.

4. む す び

最近のディジコンは計算速度がかなり速くなったが、まだ制御系の解析には時間がかかる。というのは、1回だけの計算でなく何回もくり返して、最適な点を求める問題が多いことと、計算の誤差が積み重なって系が振動を起こすとまずいので計算ピッチを小さくすること等による。ここに述べた計算方法とオイラー法、ルンゲクッタ法等との計算速度、誤差については未だ調べていないが、比較してみるつもりである。とにかく速い計算法が望まれる。

アナコンとディジコンとの比較について、簡単に述べ

よう。ディジコンでは、

- ①計算時間が長い。
- ②計算式の中の係数の変更が任意にできない。
- ③無駄時間、掛算、割算等の精度がよく、また全体の精度を上げることができる。

アナコンは、

- ①計算時間が短く、くり返し計算が容易である。
- ②計算中に解を見ながら係数を任意に変えることができる。
- ③計算式の中のどの値でも記録が容易である。
- ④精度を上げることができない。
- ⑤スケール変更の必要がある。

一般には、やはり制御系の解析は精度を要求しない限り、アナコンを用いた方がよいと思う。

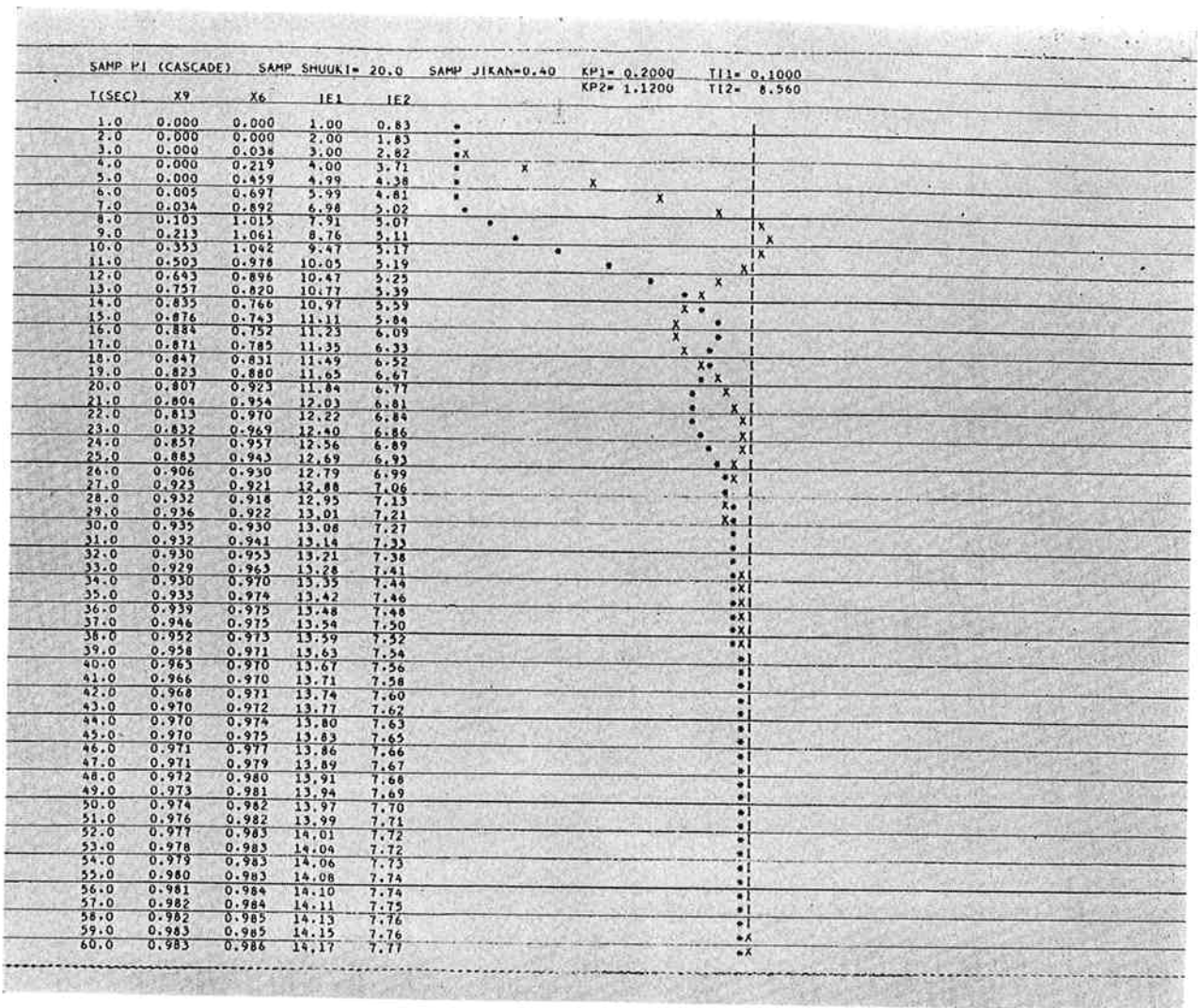


Fig. 12 Transient response of the cascade control system shown in Fig. 10, Where Pcl is a new type controller.